$f''(x)\quad f'''(x)\quad f^{(n)}(x)$

第 3 讲：函数应用之单调性问题（2）

超越函数：指、对、幂
三角至少两种.

题型四：含参讨论之“二次求导”型

22. （2020 全国Ⅰ）已知函数 $f(x)=e^x+ax^2-x$ ．当 $a=1$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

$f'(x)=e^x+2x-1$ 　求完导后看还不会画图象，继续求导　导后是超越函数

$f''(x)=e^x+2>0.$

$\therefore f'(x)$ 在 R 上 ↑　$\because f'(0)=0.$

$\therefore f'(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 小于 0．在 $(0,+\infty)$ 大于 0.

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ ↓　$(0,+\infty)$ ↑

23. 函数 $f(x)=\dfrac{\ln x+1}{e^x}$,求函数的单调性.

分母 >0．只令分子再求导即可

$u=\ln x+1$

$f'(x)=\dfrac{u'e^x-ue^x}{e^{2x}}=\dfrac{u'-u}{e^x}=\dfrac{\frac{1}{x}-\ln x-1}{e^x}$　$x\in(0,+\infty)$

令 $g(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x-1$

$g'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}$

$\therefore g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ ↓

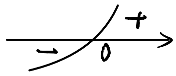
又 $\because g(1)=0.$

$\therefore f(x)$ 在 $(0,1)$ ↑．$(1,+\infty)$ ↓

24. (2015 新课 2 理)设函数 $f(x)=e^{mx}+x^2-mx$.

(1)证明: $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减,在 $(0,+\infty)$ 单调递增.

$f'(x)=me^{mx}+2x-m$

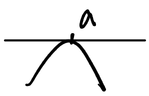


$f''(x)=m^2e^{mx}+2>0.$

$f'(x)$ 在 R 上 ↑　$\because f'(0)=0.$　$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ ↓，在 $(0,+\infty)$ 上 ↑

25. （2020 全国Ⅱ）已知函数 $f(x)=2\ln x+1$ ．设 $a>0$，讨论函数 $g(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 的单调性．

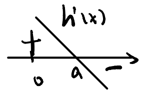
$g'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot(x-a)-f(x)+f(a)}{(x-a)^2}=\dfrac{2-\frac{2a}{x}-2\ln x-1+2\ln a+1}{(x-a)^2}$



$=\dfrac{-\frac{2a}{x}-2\ln x+2\ln a+2}{(x-a)^2>0}$　$x\in(0,+\infty)$

令 $\boxed{h(x)=-\dfrac{2a}{x}-2\ln x+2\ln a+2}$　代入 a，刚好 $h(a)=0$.

$h'(x)=\dfrac{2a}{x^2}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2a-2x}{x^2}$



$h(x)$ 在 $(0,a)$ ↑，$(a,+\infty)$ ↓.

$h(x)\le h(a)=0$　即 $g'(x)\le 0$.

$\therefore g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减

26. 已知函数 $f(x)=\ln^2(x+1)-\dfrac{x^2}{1+x}$，求函数 $f(x)$ 的单调区间.

求三次导

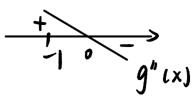
$f'(x)=2\ln(x+1)\cdot\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2}$

$=\dfrac{2(x+1)\ln(x+1)-(x^2+2x)}{(x+1)^2}$　$x\in(-1,+\infty)$

令 $g(x)=2(x+1)\ln(x+1)-(x^2+2x)$

$g'(x)=2\ln(x+1)+2-2x-2=2(\ln(x+1)-x)$

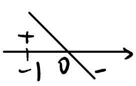
$g''(x)=2\left(\dfrac{1}{x+1}-1\right)=2\cdot\dfrac{-x}{x+1}$ $x+1>0$



$\therefore g(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ ↓

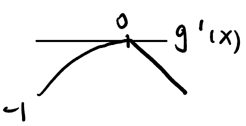
$g(0)=0$

$g'(x)$ 在 $(-1,0)$ 上 ↑，$(0,+\infty)$ ↓



$\therefore f(x)$ 在 $(-1,0)$ ↑

在 $(0,+\infty)$ ↓



$g'(0)=0.$

$\therefore g'(x)\le g'(0)=0.$

题型五：已知单调性求参 $f(x)\uparrow \Rightarrow f'(x)\geq 0.$

27. （2014 全国大纲）若函数 $f(x)=\cos 2x+a\sin x$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$ 上是减函数，则 a 的取值范围是 $\underline{(-\infty,2]}$

$f'(x)=-2\sin 2x+a\cos x\leq 0.$

$a\cos x\leq 4\sin x\cos x$

$a\leq 4\sin x$

$a\leq 2$

28. 法三. $g(x)=\frac{\ln x+1}{x}$

$g'(x)=\frac{1-\ln x-1}{x^2}=\frac{-\ln x}{x^2}$

$(0,1)\uparrow,\ (1,+\infty)\downarrow$

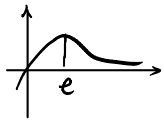
$g(x)_{max}=g(1)=1$

$\therefore a\geq 1$

28. 已知函数 $f(x)=x\ln x-\frac{1}{2}ax^2$，若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，求实数 a 的取值范围.

$f'(x)=\ln x+1-ax\leq 0\quad \leq 0.$

$\frac{\ln x+1}{x}\leq a.\qquad x\in(0,+\infty)$



法一：技巧：$y=\frac{\ln x+1}{x}=\frac{\ln x+\ln e}{x}=\frac{\ln ex}{ex}\cdot e=\frac{\ln t}{t}\cdot e=\frac{\ln e}{e}\cdot e=1.$ 放缩

法二：$y=\frac{\ln x+1}{x}\leq\frac{x-1+1}{x}=1$

29. 已知函数 $f(x)=(2ax-x^2)e^{ax}$，其中 $a\geq 0$.若函数 $f(x)$ 在区间 $(\sqrt{2},2)$ 上单调递减，求实数 a 的取值范围.

$f'(x)=(2a-2x)e^{ax}+(2ax-x^2)ae^{ax}$

$=e^{ax}\left(-ax^2+(2a^2-2)x+2a\right)\leq 0.$

法一. $-ax^2+(2a^2-2)x+2a$ 分离分离

① $a=0$ 时 $-2x\leq 0$. 符合.

② $a>0$ 时 $-x^2+(2a-\frac{2}{a})x+2\leq 0.\Rightarrow 2a-\frac{2}{a}\leq x-\frac{2}{x}\uparrow$

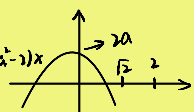
$2a-\frac{2}{a}\leq 0.\Rightarrow 0<a\leq 1$

综上. $a\in[0,1]$

法二：① $a=0.$ ✓

② $a>0$

$h(x)=-ax^2+(2a^2-2)x+2a.$



$h(\sqrt{2})\leq 0.$ 隐含信息 $h(0)>0$

$\Rightarrow 0<a\leq 1$

30. 已知函数 $f(x)=x-ax^2-\ln x$ 在定义域上是单调函数，求 a 的取值范围.

全正／全负.

技巧：代入一个值

$f'(x)=1-2ax-\frac{1}{x}=\frac{-2ax^2+x-1}{x}$

令 $g(x)=-2ax^2+x-1$

$g(0)=-1<0\quad\therefore f(x)$ 只能单调递减

$-2ax^2+x-1\leq 0.\quad 2a\geq\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=t-t^2\quad a\geq\frac{1}{8}$

$2ax^2\geq x-1\qquad\qquad max=\frac{1}{4}$

31. 已知函数 $f(x)=a(x-\frac{1}{x})-2\ln x$ 在定义域内为单调函数，求 a 的取值范围.

$f'(x)=a(1+\frac{1}{x^2})-\frac{2}{x}=\frac{a^2(x^2+1)-2x}{x^2}=\frac{ax^2-2x+a}{x^2}$

代数都不能确定 $f'(x)$ 正负.

① 若 $f(x)\uparrow.\quad a(x^2+1)-2x\geq 0.$

$a\geq\frac{2}{x+\frac{1}{x}}\quad \geq 2$

$\therefore a\geq 1.$

综上

② 若 $f(x)\downarrow\quad a\leq\frac{2x}{x^2+1}=\frac{2}{x+\frac{1}{x}}\quad =+0.\quad +\infty$

$\therefore a\leq 0.$

32. 已知 $f(x)=x^3-ax^2-3x$，其中 $a\in R$.若 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上存在单调递减区间，求 a 的取值范围。

$f'(x)=3x^2-2ax-3$

$f(x)$ 存在单减区间

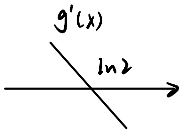
$\Rightarrow \exists x_0\in I.\ f'(x_0)<0$

33. 若函数 $f(x)=x^2-e^x-ax$ 在 R 上存在单调递增区间，则实数 a 的取值范围是 $a<2\ln2-2$.

$f'(x)=2x-e^x-a>0$.

$\underbrace{2x-e^x}_{max}>a$.

令 $g(x)=2x-e^x$



$g(x)$ 在 $(-\infty,\ln2)\uparrow\quad(\ln2,+\infty)\downarrow$

$g(x)_{max}=g(\ln2)=2\ln2-2$.

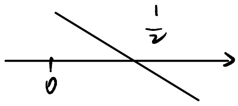
34. 已知函数 $f(x)=mx^2+\ln x-2x$ 在定义域内不是单调函数，则实数 m 的取值范围____．

有变号零点

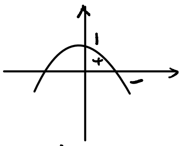
$f'(x)=2mx+\frac{1}{x}-2=\frac{2mx^2-2x+1}{x}$

令 $g(x)=2mx^2-2x+1$

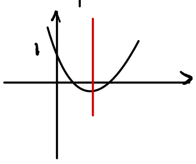
① $m=0$时. $g(x)=-2x+1$



② $m<0$时



③ $m>0$



$\Delta=4-4\cdot2m\cdot1>0$

$f'(\frac{1}{2m})<0$.

$\frac{1}{2m}>0$.

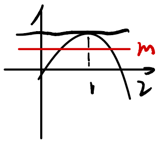
$\boxed{分参}$ $f'(x)=2mx+\frac{1}{x}-2=0$

$2mx=2-\frac{1}{x}$

$2m=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}$

令 $t=\frac{1}{x}$

$2m=2t-t^2\ (t>0)$.



$2m<1\Rightarrow m<\frac{1}{2}$